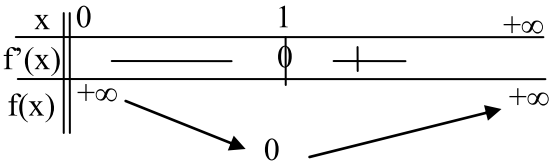
5. $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$

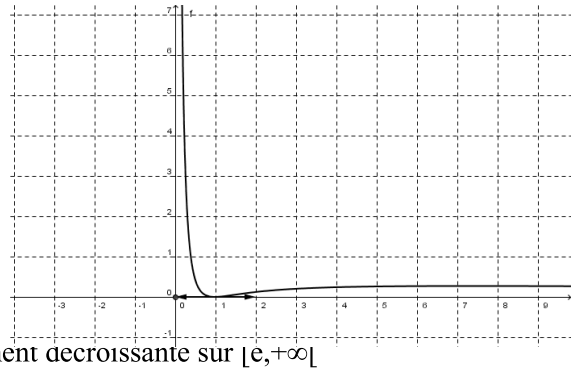
Exercice N°7 :



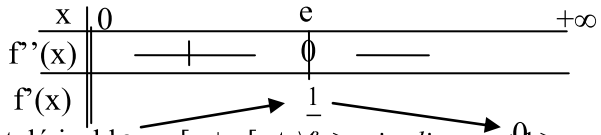
1. $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $\forall x>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln^2(x)}{x}=0$

Donc C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$.

2.a) f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[: f''(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$



1 – lnx ≥0 équivaut à 1 ≥ lnx équivaut à 0 < x ≤ e.



a) f est dérivable sur $[e,+\infty[$ et $\forall x\geq e$ *implique* $x+1\geq e$

alors il existe un réel $c\in]x,x+1[$ tel que :

$\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(c)$ $\forall e\leq x\leq c\leq 1+x$ comme f' est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$

alors : $f'(1+x)\leq f'(c)\leq f'(x)$ équivaut à $\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\leq f'(c)\leq\dfrac{\ln x}{x}$ d'où $\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\leq f(x+1)-f(x)\leq\dfrac{\ln x}{x}$

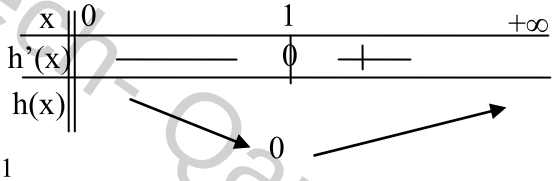
c) $\sum\limits_{k=3}^{k=n}\dfrac{\ln(1+k)}{1+k}\leq\sum\limits_{k=3}^{k=n}[f(k+1)-f(k)]\leq\sum\limits_{k=3}^{k=n}\dfrac{\ln k}{k}$ or

$\sum\limits_{k=3}^{k=n}[f(k+1)-f(k)]=f(4)-f(3)+f(5)-f(4)+.....+f(n+1)-f(n)=f(n+1)-f(3)$ donc

$f(n+1)-f(3)\leq\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+....+\dfrac{\ln(n)}{n}$ alors $f(n+1)-f(3)\leq U_n-\dfrac{\ln 2}{2}$ équivaut à $f(n+1)-f(3)+\dfrac{\ln 2}{2}\leq U_n$ or

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

Exercice N°8 :



1.a) h est dérivable sur $]0,+\infty[$, $h'(x)=\ln x$; d'après le tableau de variation h admet 0 comme minimum absolue sur $]0,+\infty[$ donc h(x) ≥ 0 pour tout x > 0.

b) $1<\dfrac{x\ln x}{x-1}<1+\ln x$ $\forall x>1\Leftrightarrow x-1<x\ln x<(x-1)(1+\ln x)\forall x>1$

$\Leftrightarrow x-1<x\ln x$ et $x\ln<x+x\ln x-1-\ln x\Leftrightarrow\begin{cases}1-x+x\ln x>0 & (a)\\ x-1-\ln x>0 & (b)\end{cases}\forall x>1$ d'après 1)a- on a

h(x)>0 $\Leftrightarrow 1-x+x\ln x>0$ $\forall x>1$ donc (a) est vraie. On pose $g(x)=x-1-\ln x$ pour $x>1$ g est dérivable $\forall x>1$ et $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}>0$ $\forall x>1$ donc g est strictement croissante $]1,+\infty[$ alors pour tout x > 1, on a g(x) > g(1) = 0 d'où (b) est vraie.

Qarray.tn -Adra Blech- Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...